NOTICE

SUR LES

TRAVAUX SCIENTIFIQUES

DE

M. Jules TANNERY,

SOUS-DIRECTEUR DES ÉTUDES SCIENTIFIQUES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1901



ÉTAT DES SERVICES.

1866. Élève de l'École Normale supérieure.
1869. Agrégé de l'Université (Mathématiques). Chargé de cours au lycée de Rennes.
1871. Chargé de cours au lycée de Caen.
1872. Agrégé-préparateur de Mathématiques à l'École Normale supérieure.
1874. Docteur ès Sciences mathématiques.
1875. Délégué dans une chaire de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis.
1875. Suppléant de M. Bouquet dans la chaire de Mécanique physique et expérimentale. Cette suppléance a duré de l'année scolaire 1875-1876 à l'année scolaire 1879-1880 inclusivement.
1876. Rédacteur du *Bulletin des Sciences mathématiques*.
1877. Membre du Jury d'agrégation de Mathématiques (années 1877, 1878, 1879, 1880, 1881).
1881. Maître de conférences à l'École Normale supérieure.
1882. Maître de conférences à l'École Normale supérieure d'enseignement secondaire des jeunes filles de Sèvres.
1884. Sous-Directeur des études scientifiques à l'École Normale supérieure.
1885. Membre du Comité consultatif de l'Enseignement supérieur, membre de la Commission de patronage de la première section de l'École des Hautes Études.
1900. Membre du Conseil de perfectionnement des Écoles de la Marine.



NOTICE

SUR LES

TRAVAUX SCIENTIFIQUES

DE

M. Jules TANNERY,

SOUS-DIRECTEUR DES ÉTUDES SCIENTIFIQUES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

C'est les principes des Mathématiques et la façon de les exposer qui m'ont surtout préoccupé; je me suis particulièrement appliqué à méditer les fondements de l'Analyse, j'ai essayé d'en approfondir les principes; j'ai tourné mes efforts vers l'enseignement, la coordination et la divulgation des vérités acquises, bien plus que je n'ai cherché à en découvrir de nouvelles. D'ailleurs, ma carrière s'est trouvée singulièrement conforme à mes goûts, et je n'ai pas eu à désirer qu'il y fût changé quelque chose.

Après avoir suppléé, pendant cinq années, M. Bouquet dans la chaire de Mécanique physique et expérimentale, j'ai été nommé, en 1881, maître de conférences à l'École Normale. Là, mes fonctions mêmes m'obligeaient à réfléchir sur les principes, à chercher avec mes élèves la meilleure manière de les présenter : je me suis efforcé de leur montrer les difficultés qu'on y rencontre. Je suis persuadé que ceux qui enseignent doivent avoir pensé longuement à ces difficultés, si même ils ne doivent pas les développer et les résoudre devant des auditeurs trop jeunes ou trop pressés d'arriver au but. D'un autre côté, la clarté des principes facilite, abrège et assure le travail de

recherche chez ceux qui en sont capables, et le temps passé à se pénétrer de cette clarté n'est pas perdu pour eux. Si quelques-uns de mes anciens élèves estiment trop haut les services que j'ai essayé de leur rendre et l'influence que j'ai eue sur leur pensée, je ne puis, tout en faisant la part de l'amitié qu'ils n'ont cessé de me témoigner, croire qu'ils se trompent tout à fait : j'ai confiance dans leur loyauté, comme j'admire leur talent.

Il y a vingt-cinq ans, M. Darboux a bien voulu me demander de collaborer avec lui et avec M. Hoüel à la rédaction du *Bulletin des Sciences mathématiques;* je m'honore de cette longue collaboration, à laquelle M. Picard s'est associé récemment : elle a absorbé une bonne partie de mon temps et de mon travail.

La production scientifique est aujourd'hui rapide et étendue : aucun savant ne peut avoir à sa disposition immédiate toutes les publications relatives à la science dont il s'occupe, et son temps ne suffirait pas à les lire attentivement. Il importe de signaler ces publications et les principaux résultats qu'elles contiennent : en parcourant l'analyse des principaux Livres et Mémoires, le travailleur peut se tenir au courant des découvertes essentielles et savoir quels travaux il devra consulter ou étudier, parce qu'ils intéressent particulièrement ses propres recherches. Être utile de cette façon et dans ce sens, tel est le but et la raison d'être du *Bulletin;* je me suis efforcé de regarder ce but, de faire connaître les œuvres plutôt que de les juger, d'en parler enfin avec la déférence que méritent ceux qui contribuent à accroître le domaine scientifique.

Je parlerai tout d'abord, dans ce qui suit, de celles de mes publications où se trouvent touchées quelques questions intéressant les principes; j'analyserai ensuite divers Mémoires ou Notes que j'ai publiés dans les *Annales scientifiques de l'École Normale,* dans les *Comptes rendus,* dans le *Bulletin des Sciences mathématiques :* je reviendrai sur ma collaboration à ce dernier Recueil, en insistant sur les articles qui m'ont paru avoir quelque portée générale; je signalerai, en terminant, plusieurs articles, d'un caractère philosophique, que j'ai publiés dans d'autres Revues.

Introduction à la Théorie des fonctions d'une variable.

Paris, Hermann, 1886.

Les Leçons que j'ai dû faire à l'École Normale supérieure, lorsque j'ai eu l'honneur d'y succéder à M. Darboux, en 1881, m'ont conduit à écrire ce Livre. Plusieurs mathématiciens illustres s'étaient, pendant une bonne partie du XIXe siècle, grandement préoccupés de reviser les principes de l'Analyse, et de les établir avec une entière rigueur. Ce travail de critique était nécessité par les faits mêmes que l'on avait rencontrés en Analyse : il me semblait convenable de faire pénétrer dans l'enseignement ceux des résultats de cette critique qui me paraissaient être essentiels et vraiment *élémentaires*. En cela, d'ailleurs, je suivais l'exemple de M. Darboux, dont j'ai, à plusieurs reprises, utilisé et les leçons à l'École, et les conversations ([1]), sans parler du Mémoire capital *Sur les fonctions discontinues* ([2]). Mon but, en écrivant l'*Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, était de montrer que l'Analyse tout entière pouvait se développer en partant de la seule idée du nombre entier : avec le nombre entier, il est assez facile d'engendrer les nombres rationnels (positifs ou négatifs), je ne m'y suis pas arrêté; j'ai insisté au contraire longuement sur les nombres irrationnels, sans la considération desquels les notions de limite, de somme d'une série, de produit infini, de fonction continue, de dérivée, d'intégrale restent quelque peu confuses : j'ai exposé deux méthodes pour introduire les nombres irrationnels et légitimer les opérations faites sur ces nombres : l'une, irréprochable au point de

---

([1]) Je signalerai en particulier la démonstration de ce fait qu'une fonction continue atteint son maximum, et l'application de cette proposition à la démonstration classique (d'après Ossian Bonnet) de la formule (*) $f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)$ (nos 140, 141), puis, dans un autre ordre d'idées, les nos 65, 67, 68 de l'Introduction des *Éléments de la théorie des fonctions elliptiques* relatifs au nombre e, à la fonction e^x, et aux fonctions circulaires.

([2]) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 2e série, T. IV, p. 57.

(*) M. Andoyer, alors qu'il était élève à l'École Normale, m'a fait observer que la démonstration de cette formule ne supposait pas l'existence de la dérivée de la fonction $f(x)$ pour les valeurs extrêmes a et $a+h$.

vue logique, mais un peu formelle, est due à M. Méray ([1]); l'autre, sur laquelle j'ai insisté davantage, coïncide avec celle qu'avait donnée, en 1872, M. Dedekind dans le Mémoire intitulé *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. Elle se rattache très naturellement à quelques-unes des notions sur les ensembles que l'on doit à M. G. Cantor, notions qui étaient alors assez nouvelles en France, dont j'ai parlé avec quelque timidité, et dont l'importance dans l'exposition des principes de l'Analyse est maintenant éprouvée.

L'idée de nombre une fois complétée, les propositions classiques relatives à la notion de limite et à toutes celles qui en sortent prennent un sens parfaitement clair et précis; je n'ai eu qu'à utiliser des résultats acquis, à les repenser un peu profondément, à les disposer dans un ordre didactique : il n'y avait à cela aucune difficulté et, à le faire, je n'ai éprouvé que du plaisir : la joie de celui qui trouve la vérité n'est pas tout à fait inconnue à celui qui l'expose.

J'ai surtout utilisé le *Cours d'Analyse* de Cauchy, les *Fundamenti per la Teorica delle Funzioni di Variabili reali* de M. Dini, le *Lehrbuch der Analysis* de M. Lipschitz ([2]), le Mémoire d'Abel sur la série du binome, les Mémoires de Dirichlet et de Riemann sur les séries trigonométriques, les premiers Mémoires de M. G. Cantor sur la Théorie des ensembles, quelques Leçons ou Mémoires de Weierstrass, le Mémoire *Sur la Théorie générale des séries* d'O. Bonnet ([3]), les Mémoires de M. Darboux *Sur les fonctions discontinues* et *Sur les développements en série des fonctions d'une seule variable* ([4]).

En exposant les propositions fondamentales relatives aux séries et produits infinis, je me suis borné au cas d'une variable réelle. Toutefois, les démonstrations sont faites de façon à s'étendre immé-

([1]) *Nouveau Précis d'Analyse infinitésimale* (1872), *Leçons nouvelles sur l'Analyse*, t. I, 1894. C'est aussi le point de départ de Heine [*Die Elemente der Functionenlehre*, (*Crelle*, t. 74, p. 172)].

([2]) J'aurais pu tirer aussi parti du *Calcolo differenziale, etc*... de MM. Genocchi et Peano (1884) avec lesquels je me suis rencontré sur quelques points.

([3]) *Mémoires couronnés... publiés par l'Académie de Belgique*, t. XXIII.

([4]) *Journal de Liouville*, 3e série, t. XI, p. 295. — Je ne cite ici que les Livres ou Mémoires utilisés pour les questions de principe. Sur un point de détail (p. 350), je pourrais signaler un emprunt fait au *Traité d'Analyse* de M. Laurent.

diatement au cas d'une variable complexe. Pour ce qui est des fonctions, des dérivées et des intégrales, je me suis borné aux variables réelles; j'ai l'intention de traiter des variables complexes dans la seconde édition, que je prépare actuellement.

J'ai poussé le scrupule jusqu'à m'abstenir de toute interprétation géométrique; ce scrupule serait, à coup sûr, déplacé dans un enseignement élémentaire; il était, à ce que je crois, légitime, à cause du but que je me proposais : montrer comment on peut fonder l'Analyse sur la seule idée de nombre.

Éléments de la Théorie des fonctions elliptiques.

Paris, Gauthier-Villars, 1893, 1896, 1898, 1901. En collaboration avec M. Molk.

Nous corrigeons en ce moment, M. Molk et moi, les épreuves du second fascicule du dernier Volume de cet Ouvrage, dont le premier Volume a paru en 1893.

Nous avons d'abord réuni les propositions de la Théorie des séries et des produits infinis dont nous comptions faire un usage continuel. Les 130 premières pages du premier Volume complètent en quelque sorte mon *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable;* nous avons laissé de côté les propositions concernant les intégrales prises entre des limites imaginaires, uniquement parce que ces propositions sont, en France, enseignées partout, et qu'il nous semblait inutile d'en reprendre l'exposition. Nous avons pris pour point de départ les fonctions p, σ, ζ de Weierstrass définies par des séries ou des produits infinis à double entrée, mais sans donner pour cela à ces fonctions un rôle prépondérant; nous avons mis tous nos soins à bien expliquer les diverses notations, en particulier celles de Jacobi et de Ch. Hermite, et à montrer comment on pouvait passer des unes aux autres. Nous avons développé d'abord celles des propriétés des fonctions elliptiques qui se déduisent naturellement, par voie d'identité, des définitions analytiques que nous avions adoptées.

Le second Volume est consacré presque en entier aux fonctions ϑ. Nous avons particulièrement insisté sur le problème de la transformation linéaire: on sait que ce problème, dont toute la difficulté

repose sur la détermination d'un signe, a été complètement résolu par Ch. Hermite dans quelques pages admirables, imprimées dans le *Journal de Liouville* (1). Ce n'est pas toutefois la méthode de Ch. Hermite que nous avons suivie dans notre second Volume (2), parce qu'elle ne rentrait pas dans la suite d'idées où nous étions placés. Nous avons établi directement les formules relatives à la fonction $\mathfrak{h}(\tau)$ de M. Dedekind (3) sous la forme donnée par M. Weber dans ses *Elliptische Functionen* (p. 100). La démonstration de M. Weber, très remarquable par sa grande concision, est une *vérification*; la voie que nous avons suivie, plus longue sans doute, conduit naturellement au but, en partant des relations mêmes que M. Dedekind avait établies (4), et que M. Molk a eu la pensée d'utiliser: elles permettent, quand on se donne les entiers a, b, c, d liés par la relation $ad-bc=1$, d'obtenir $\mathfrak{h}\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right)$ au moyen de $\mathfrak{h}(\tau)$. En transformant ces formules de manière à y introduire le symbole de Legendre-Euler, nous sommes parvenus aux formules cherchées, sans avoir d'ailleurs à faire intervenir la signification arithmétique de ce symbole.

---

(1) 2e série, T. III.

(2) Elle se trouvera toutefois exposée, avec tous les préliminaires indispensables, à la fin du dernier Volume. Celui-ci se terminera en effet par une lettre que Ch. Hermite m'a écrite quelques semaines avant sa mort, et où il donne une démonstration des formules relatives à la transformation linéaire des fonctions

$$\varphi(\tau)=\sqrt{2}\,q^{\frac{1}{8}}\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{1+q^{2n}}{1+q^{2n-1}},\qquad \psi(\tau)=\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}},$$

formules qu'il avait données sans explications dans le t. XLVI des *Comptes rendus* (p. 588 et 715). L'illustre géomètre s'appuyant dans sa lettre sur les formules mêmes de la transformation linéaire des fonctions $\mathfrak{S}$, telles qu'il les avait établies dans le *Journal de Liouville*, il nous a paru opportun, afin que sa pensée fût mieux comprise, d'établir ces formules d'après sa méthode et sous la forme précise qu'il avait obtenue.

(3) τ représente le rapport des périodes; M. Dedekind désigne cette fonction par $\eta(\tau)$. On a

$$\mathfrak{h}(\tau)=q^{\frac{1}{24}}\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-q^{2n}).$$

(4) *Riemann's Werke*, 2e édit. Nachlass XXVII.

La fin du second Volume est consacrée à celles des propriétés des fonctions sn, cn, dn (et des fonctions analogues) qui se déduisent naturellement des propriétés antérieurement établies des fonctions σ ou $\mathfrak{S}$.

Au début du troisième Volume, nous avons réuni les théorèmes généraux (Liouville, Hermite, etc.) concernant les fonctions doublement périodiques de première, de seconde et de troisième ([1]) espèce et les applications de ces théorèmes à la démonstration des propriétés des fonctions particulières qui avaient été précédemment introduites. Nous avons ensuite traité de l'intégration des fonctions doublement périodiques.

Cette intégration, une fois la fonction doublement périodique décomposée en éléments simples, ne présente, comme l'on sait, aucune difficulté, sauf, peut-être, pour l'évaluation des intégrales de la forme

$$\int \frac{\mathfrak{S}_1'(v)}{\mathfrak{S}_1(v)} dv,$$

le long d'un chemin donné, parce qu'il est alors indispensable de préciser le multiple de $2\pi i$ qui s'introduit, à cause du logarithme. Cette question ne peut être évitée dans le calcul des intégrales elliptiques de troisième espèce; nous avons indiqué deux méthodes pour lever l'indétermination, l'une fondée sur l'emploi des séries trigonométriques; l'autre, qui ne s'applique que dans le cas où q est réel, positif et plus petit que un, résulte facilement de l'étude de la figure que l'on obtient en faisant la transformation conforme $w = \mathfrak{S}_1(v)$ du rectangle dont les sommets sont les points $\frac{\pm 1 \pm \tau}{2}$ (T. III, Chap. VI). Cette méthode s'applique par exemple dans le cas du pendule sphérique ou du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe, comme nous le montrons dans le fascicule qui est sous presse.

Jusque-là nous avions considéré les fonctions doublement périodiques comme données au moyen des périodes, ou, s'il s'agit des

---

[1] A propos des fonctions de troisième espèce, il convient de signaler (n° 380) un emprunt fait aux *Elliptische Functionen* (p. 40) de M. Weber. La démonstration d'une propriété de la théorie des substitutions qui se trouve au n° 131 est tirée du même Ouvrage (p. 73).

fonctions de Jacobi, au moyen du rapport τ des périodes. Nous avons consacré un Chapitre (T. III, Ch. VII) à la solution et aux conséquences de la solution des deux problèmes suivants, dont le premier se ramène aisément au second.

Quand on se donne les nombres, γ_2, γ_3 ou $\varkappa$, trouver tous les couples de nombres à rapport imaginaire ω_1, ω_3 ou tous les nombres imaginaires τ dans lesquels le coefficient de i est positif, qui vérifient respectivement les équations

$$g_2(\omega_1, \omega_3) = \gamma_2, \qquad g_3(\omega_1, \omega_3) = \gamma_3,$$

ou

$$k^2(\tau) = \varkappa.$$

Il est à peine utile de dire que, dans les premiers membres de ces équations, $g_2(\omega_1, \omega_3)$, $g_3(\omega_1, \omega_3)$ ou $k^2(\tau)$ représentent les fonctions de ω_1, ω_3 ou de τ qui ont été définies dans les Chapitres antérieurs. Nous croyons avoir exposé d'une façon simple et naturelle la solution de ce problème classique, de manière à bien faire saisir, d'une part, les propriétés essentielles de la fonction τ considérée comme une fonction de $\varkappa$, d'autre part les meilleures méthodes pour le calcul numérique. Nous avons tiré pour cela grand parti de mon Mémoire *Sur une équation différentielle linéaire du second ordre*, dont il sera question plus loin.

Nous nous sommes occupés ensuite des fonctions inverses de $\operatorname{sn} u$, $pu, \ldots$, en particulier du problème qui consiste à déterminer la valeur de u quand on se donne $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{sn}' u$ ou pu, $p'u$. Le problème est alors déterminé à des multiples près des périodes $2K$, $2iK'$ ou $2\omega_1$; $2\omega_3$; on trouve dans le Formulaire de M. Schwarz des séries très convergentes pour résoudre ce dernier problème; nous avons insisté sur la démonstration de ces formules, sur leur sens et leur usage, puis (Chap. IX, t. IV) sur la façon de définir, dans le cas où g_2 et g_3 sont réels, u comme une fonction univoque de y, par la formule $y = pu$, en introduisant des coupures convenables dans le plan qui sert à représenter la variable y, coupures formées de lignes droites quand les racines de l'équation

$$4z^3 - g_2 z - g_3 = 0$$

sont réelles, de lignes droites et d'arcs de cercle quand deux de ces

racines sont imaginaires conjuguées; on arrive à ce résultat d'une part en étudiant la représentation conforme $y = pu$ de la moitié du rectangle, ou du losange, des périodes de la fonction $p(u|\omega_1, \omega_3)$, suivant que $\omega_1, \frac{\omega_3}{i}$ sont réels ou que ω_1, ω_3 sont des imaginaires conjuguées (n[os] 591, 594); d'autre part (Note du Tableau des formules, t. IV, p. 159), en partant de la série même qui permet le calcul de u, connaissant pu. La première méthode s'applique très facilement à la définition précise de la fonction inverse de $\text{sn}\, u$, lorsque k^2 est réel, positif et plus petit que un. Nous n'avons pas abordé le cas où g_2 et g_3 sont imaginaires; mais dans le cas où les invariants sont réels, les explications que nous avons données permettent de calculer, sans aucune ambiguïté, les intégrales du type

$$\int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}$$

prises le long d'un chemin donné quelconque. Au reste, cela a été pour nous un souci continuel que de ne laisser aucune ambiguïté dans la signification des formules ou des opérations.

Le dernier fascicule, qui est sous presse, contiendra le développement de quelques applications classiques, les notions essentielles relatives à la division des périodes et à la théorie de la transformation, enfin la lettre de Ch. Hermite, dont j'ai dit quelques mots dans ce qui précède.

Le Formulaire de M. Schwarz [1] nous a été grandement utile. La plupart des propositions et formules qui y sont contenues se trouvent démontrées dans notre Ouvrage, auquel nous avons joint aussi un Tableau de formules; soutenus en cela par l'inépuisable complaisance de M. Gauthier-Villars, nous nous sommes efforcés de rendre ce Tableau aussi pratique que possible. Il se trouve divisé en deux parties : l'une termine le Tome II, l'autre est à la fin du fascicule du Tome IV qui a déjà paru.

---

[1] *Formules et propositions pour l'emploi des fonctions elliptiques, d'après des Leçons et des Notes manuscrites de M. R. Weierstrass*, traduction de M. Padé.

Deux Leçons de Cinématique.

Paris, Gauthier-Villars, 1886 [1].

J'ai cherché d'abord à exposer les propositions fondamentales de la théorie des vecteurs, qui sont les préliminaires indispensables de la Cinématique, de la Statique et de la Dynamique, de manière qu'elles pussent entrer dans un enseignement élémentaire, et que leur généralité fût aperçue clairement. J'ai insisté de mon mieux sur la détermination des signes et la disposition des éléments géométriques.

Dans la seconde Partie, j'ai appliqué ces propositions à la démonstration des propriétés classiques du mouvement d'un plan qui glisse sur un plan ou d'un corps solide qui tourne autour d'un point fixe : expression de l'accélération d'un point; expression du rayon de courbure de la trajectoire d'un point; la seconde expression est déduite simplement de la première, en sorte que la démonstration ne comporte aucune ambiguïté de signe.

Leçons d'Arithmétique théorique et pratique.

A. Colin (1894).

C'est un livre d'enseignement, qui fait partie de la collection publiée sous la direction de M. Darboux.

Je me suis efforcé de faire pénétrer un peu de philosophie dans l'exposition des principes, mais en tenant compte de l'état d'esprit de ceux à qui ce Livre était destiné et en écartant les discussions subtiles qui intéressent plus la Philosophie proprement dite que l'Arithmétique. Avant d'exposer la numération, qui implique en réalité la connaissance des quatre opérations fondamentales, je me suis efforcé de faire bien saisir, sur des exemples concrets, le sens de ces opérations; de même pour les fractions : après en avoir expliqué l'origine concrète, j'en ai exposé la théorie abstraite, ainsi qu'avait

[1] Publié aussi dans les *Annales de l'École Normale*.

déjà fait M. Méray, en les regardant comme des couples de nombres entiers. A propos du système métrique, j'ai expliqué, d'une façon élémentaire, les propositions fondamentales relatives à la mesure des grandeurs, et j'ai repris ce sujet, après la théorie des nombres irrationnels, d'une façon plus élevée, en adoptant un point de départ que m'avait suggéré M. Darboux [1]. J'ai terminé ce Livre par un exposé sommaire des éléments de la Théorie des nombres, rédigé avec l'intention de faire comprendre aux élèves qu'il y a là une véritable science et non pas une réunion de théorèmes plus ou moins curieux.

Enfin, j'ai introduit çà et là quelques renseignements historiques, que je dois tous à mon frère, M. Paul Tannery, bien connu par ses nombreux travaux d'Histoire et de Philosophie.

Introduction à l'étude de la Théorie des nombres et de l'Algèbre supérieure, par Émile Borel et Jules Drach, d'après des Conférences faites à l'École Normale supérieure par M. Jules Tannery.

Paris, Nony, 1893.

Je ne signale ce Livre que pour répéter ce que j'ai dit dans la Préface, à savoir qu'il est l'œuvre de MM. Borel et Drach, non la mienne; les Leçons que j'ai faites à l'École Normale en ont été l'occasion, non l'origine. La partie qui concerne l'Algèbre, en particulier, est l'œuvre de M. Drach. La Note I, où l'on montre comment on peut reconnaître si un polynome donné est divisible par un nombre entier quelconque, et trouver inversement tous les polynomes divisibles par un nombre donné, appartient exclusivement à M. Borel.

[1] Ce n'est pas la seule fois que j'aie utilisé les conseils de M. Darboux; je me contente de signaler le n° 242, relatif à la recherche de la fraction génératrice d'une fraction décimale périodique.

NOTES ET MÉMOIRES.

Sur les équations différentielles linéaires à coefficients variables.

Thèse de Doctorat (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 2e Série, t. IV, p. 113).

Ce Travail a été entrepris sur le désir et le conseil de Ch. Hermite, qui n'avait pas manqué d'être frappé par l'importance des résultats contenus dans le premier Mémoire de M. L. Fuchs, *Zur Theorie der Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten* [1], et de prévoir les développements considérables que ce sujet devait prendre. On sait que ce Mémoire se rapporte aux équations différentielles de la forme

$$p_0 \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots \quad + p_{n-1} \frac{dy}{dx} + p_n y = 0,$$

où $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}, p_n$ sont des polynomes en x.

Ces équations, comme l'Auteur l'a montré, constituent le type le plus simple des équations différentielles *à points critiques* fixes. Le rôle des points singuliers, la forme des solutions au voisinage de ces points sont mis en évidence, et le germe de l'idée du groupe de l'équation différentielle linéaire, qui a été dégagée et précisée plus tard, apparaît dans le Mémoire de M. Fuchs; enfin celui-ci a caractérisé une classe spéciale d'équations dont les solutions, pour tous les points singuliers, appartiennent à des exposants finis, et a montré comment on pouvait déterminer ces exposants.

Il n'y a pas lieu d'insister sur les légères modifications que j'ai apportées à l'exposition de M. Fuchs : j'ai appliqué, ainsi qu'il avait

[1] *Journal de Crelle*, t. 66, p. 121; 1866.

commencé de le faire lui-même, ses résultats et ses méthodes à l'équation que vérifie la série hypergéométrique, équation à laquelle se ramènent toutes celles qui appartiennent au type dont je viens de parler et qui n'ont que deux points singuliers à distance finie. Divers résultats, déjà obtenus par Riemann, se retrouvent ainsi sans aucun effort.

Je dois toutefois signaler la méthode qui permet de former l'équation différentielle linéaire du $n^{\text{ième}}$ ordre que vérifient les n solutions de l'équation entière $f(x,y) = 0$, du degré n en y. Elle est due à Ch. Hermite, qui me l'indiqua avec cette bonté dont aucun de ses élèves n'a sans doute perdu le souvenir. Un Mémoire de M. Sauvage [1], où l'Auteur a repris et généralisé ce problème, m'a donné l'occasion [2] de restituer à Ch. Hermite ce qui lui appartenait.

Sur l'équation différentielle linéaire qui relie au module la fonction complète de première espèce. — Sur quelques propriétés des fonctions complètes de première espèce.

(*Comptes rendus*, t. LXXXVI, p. 811 et p. 950; 1878.)

Sur une équation différentielle linéaire du second ordre.

(*Annales de l'École Normale*, 2e série, t. VIII, p. 169; 1879.)

Ce Travail, que j'ai fait aussi sur le conseil de Ch. Hermite, est une application des méthodes M. Fuchs à l'équation différentielle

$$(1) \qquad \varkappa(\varkappa-1)\frac{d^2y}{d\varkappa^2} + (2\varkappa-1)\frac{dy}{d\varkappa} + \frac{1}{4}y = 0$$

que vérifie la fonction complète de première espèce

$$K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa z^2)}} = X(\varkappa)$$

[1] *Théorie générale des systèmes d'équations différentielles linéaires et homogènes* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. VIII).

[2] *Ibid.*, t. IX, p. 101.

Elle est comprise comme cas particulier dans l'équation différentielle que vérifie la série hypergéométrique. M. Fuchs, dans son Mémoire intitulé *Die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale als Functionen eines Parameters aufgefasst* [1], avait traité un problème beaucoup plus général, et consacré les dernières pages au problème spécial auquel je me suis attaché : il consiste à relier les unes aux autres les diverses solutions de l'équation différentielle (ι), solutions que les méthodes de M. Fuchs fournissent immédiatement pour les domaines des trois points singuliers 0, 1, ∞, de manière à pouvoir facilement reconnaître, en partant de deux solutions déterminées de l'équation différentielle et en faisant suivre à la variable un chemin déterminé quelconque, quelles solutions on obtient pour l'extrémité de ce chemin [2]. J'ai obtenu, d'une façon très élémentaire, les relations entre les solutions qu'avait établies M. Fuchs dans le Mémoire cité, et cela en calculant des valeurs approchées de ses solutions au voisinage des points singuliers, et en faisant tendre la variable vers l'un ou l'autre de ces points. L'équation différentielle (ι) ne change pas quand on y change x en $1-x$, x en $\frac{1}{x}$ ou en $\frac{x-1}{x}$ et y en $y\sqrt{x}$, ou encore x en $\frac{x}{x-1}$ ou en $\frac{1}{1-x}$ et y en $y\sqrt{1-x}$: ces propriétés, qui se relient d'une façon évidente à la théorie de la transformation linéaire des fonctions elliptiques, sont contenues comme cas particulier dans des propriétés connues de l'équation différentielle de la série hypergéométrique. J'ai montré comment se raccordaient les diverses solutions de l'équation auxquelles elles conduisent.

Ainsi que je l'ai dit plus haut, nous avons repris et utilisé, M. Molk et moi, les résultats de ce Travail dans nos *Éléments de la Théorie des fonctions elliptiques*; ils fournissent en effet un moyen facile et naturel pour l'étude de la fonction $X(x)$, définie dans tout le plan comme une fonction univoque de x, quand on y a pratiqué deux coupures le long de l'axe des abscisses, d'une part de 0 à $-\infty$, d'autre part de

[1] *Crelle*, t. 71, p. 91; 1870.

[2] M. Goursat a donné, dans sa Thèse, une belle solution de ce problème pour le cas beaucoup plus général de l'équation différentielle linéaire de la série hypergéométrique (*Annales de l'École Normale supérieure*, 2e série, Supplément du Tome X; 1881).

1 à $+\infty$, en particulier pour établir les formules, valables dans tout le plan coupé, et sur les bords mêmes des coupures, qui relient $X(x)$, $X(1-x)$, $X\left(\frac{1}{x}\right)$, $X\left(\frac{x}{x-1}\right)$, $X\left(\frac{x-1}{x}\right)$, pour reconnaître, ainsi que l'avait fait M. Fuchs, comment se prolonge la fonction $X(x)$ quand on traverse une des coupures, pour démontrer la plupart des propriétés énoncées dans le Formulaire de M. Schwarz aux n°s 27, 40, 41, en particulier pour obtenir et étudier ces séries très convergentes dont M. Schwarz a montré l'utilité dans les calculs où interviennent les fonctions elliptiques, et spécialement celle qui donne

$$q = e^{-\pi\frac{X(1-x)}{X(x)}},$$

en fonction de x, série que Ch. Hermite a étudiée par une autre méthode [1].

Lettre à Weierstrass.

Monatsberichte der Akad. der Wiss. zu Berlin (1881).
K. Weierstrass : *Abhandlungen aus der Functionenlehre*, p. 102.

En traduisant pour le *Bulletin* les Communications *Zur Functionenlehre* de Weierstrass à l'Académie des Sciences de Berlin (août 1880), où l'Auteur expose une partie de ses vues sur les « fonctions analytiques », je remarquai que l'on pouvait remplacer, par une série plus simple, une série construite par Weierstrass au moyen des fonctions elliptiques, série dont les termes sont des fonctions rationnelles de x et dont la somme est -1 dans une région du plan, $+1$ dans une autre région. L'origine de la série que je crus devoir communiquer à Weierstrass se trouve dans un problème que j'ai inutilement cherché à résoudre dans sa généralité, et qui m'a été probablement suggéré en étudiant la démonstration du théorème fondamental de l'Algèbre que M. Lipschitz a donnée dans son *Lehrbuch der Analysis*.

Cette démonstration est fondée sur la formule d'approximation de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

(1) *Bulletin de la Société physico-mathématique de Kasan*, série II, t. VI.

L'Auteur montre assez facilement que, en partant d'une valeur convenablement choisie pour x_1, x_n a une limite pour n infini, et que cette limite est une racine de l'équation (algébrique entière) $f(x) = 0$. La question, lorsqu'on se donne les racines $a_1, a_2, a_3, \ldots$ du polynome $f(x)$, de délimiter la région du plan où doit se trouver le point x_1, pour que l'on ait

$$\lim_{n=\infty} . x_n = a_p,$$

se présente d'elle-même; je crois d'ailleurs qu'elle a été posée explicitement par Cayley.

La solution du problème résulte immédiatement, pour le cas d'une équation du second degré, de la relation

$$\frac{x_n - a_1}{x_n - a_2} = \left(\frac{x_1 - a_1}{x_1 - a_2}\right)^{2^n};$$

la ligne de séparation est alors la droite équidistante des deux points racines a_1, a_2 et la limite de x_n, pour n infini, est celle des deux racines qui se trouve du même côté que x_1, par rapport à cette droite; la série

$$x_1 + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) + \ldots$$

a donc cette racine pour somme. La série particulière

$$\frac{1+x}{1-x} + \frac{2x}{x^2-1} + \frac{2x^2}{x^4-1} + \frac{2x^4}{x^8-1} + \ldots$$

que j'ai communiquée à Weierstrass, avait d'ailleurs été signalée dès 1876 par M. E. Schröder [1].

Sur les intégrales eulériennes.

(Comptes rendus, t. XCIV, p. 1698; 1882.)

C'est l'application aux deux séries obtenues en développant suivant

[1] *Zeitschrift für Math. und Ph.*, 22e année, p. 184.

les puissances de x les deux fonctions

$$\mathrm{U}(x) = e^{\frac{1}{1-x}}(1-x)^p \int_0^x \frac{dx}{(1-x)^{p+1}\, e^{\frac{1}{1-x}}},$$
$$\mathrm{V}(x) = e^{\frac{1}{1-x}}(1-x)^p,$$

d'une proposition due à M. Appell et d'après laquelle, si les deux séries à coefficients positifs $\sum_{n=0}^{n=\infty} u_n x^n$, $\sum_{n=0}^{n=\infty} v_n x^n$ sont divergentes pour $x = 1$, convergentes pour $|x| < 1$ et si le rapport $\frac{u_n}{v_n}$ tend, pour n infini, vers une limite, le rapport

$$\frac{\sum_{n=0}^{n=\infty} u_n x^n}{\sum_{n=0}^{n=\infty} v_n x^n}$$

tend vers la même limite quand x s'approche de un par valeurs réelles croissantes. On arrive ainsi à la proposition suivante : si l'on pose, avec M. Prym,

$$\mathrm{P}(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{1}\frac{1}{z+1} + \frac{1}{1.2}\frac{1}{z+2} + \ldots,$$
$$\Gamma(z) = \mathrm{P}(z) + \mathrm{Q}(z),$$

on a, pour les valeurs réelles de z, la relation

$$e\mathrm{Q}(z) = \cfrac{1}{2-z-\cfrac{1(1-z)}{4-z-\cfrac{2(2-z)}{6-z+\cfrac{3(3-z)}{8-z-\ldots}}}}$$

Si mes souvenirs sont exacts, un développement plus général avait été obtenu antérieurement par M. Genocchi, dans un Mémoire dont il m'est impossible de retrouver le titre.

Sur la suite de Schwab.

(*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. V, p. 484; 1881.)

Dans le volume consacré par Cremona et Beltrami ([1]) à la mémoire de Chelini, M. Borchardt a traité la question suivante :

Étant donnés deux nombres positifs a, b, on fait

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \qquad b_1 = \sqrt{a_1 b},$$

$$a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}, \qquad b_2 = \sqrt{a_2 b_1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

trouver la limite de la suite indéfinie

$$a, b, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots.$$

J'ai observé qu'on arrivait immédiatement au résultat, par les formules élémentaires de la Trigonométrie, en posant

$$a = b\cos\alpha \qquad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right),$$

ou

$$a = b \operatorname{ch} \alpha \qquad (0 < \alpha),$$

suivant que a était plus petit ou plus grand que b; on trouve ainsi, pour la limite cherchée, $\frac{b \sin\alpha}{\alpha}$ dans le premier cas, $\frac{b \operatorname{sh}\alpha}{\alpha}$ dans le second.

Sur les substitutions linéaires par lesquelles une forme quadratique ternaire se reproduit elle-même.

(*Bulletin*, 1re série, t. XI, p. 221; 1877.)

Le point de départ de ce petit Travail est dû à Ch. Hermite, comme aussi la plupart des formules qui y sont établies et que l'Auteur avait données sans démonstration.

([1]) Voir *Bulletin*, même Volume, p. 425.

Le problème consiste à trouver les substitutions linéaires exprimant x, y, z en X, Y, Z qui changent la forme quadratique

$$f(x, y, z) = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2\,byz + 2\,b'zx + 2\,b''xy$$

en $f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$. La solution, qui avait été indiquée par Hermite dans ses conférences à l'École Normale, consistait à remarquer que le problème revient à trouver les substitutions linéaires exprimant u, v, w, au moyen de U, V, W, de façon que l'on ait identiquement

$$u\,\mathrm{U} + v\,\mathrm{V} + w\,\mathrm{W} = 0,$$

en supposant

$$u = x - \mathrm{X}, \qquad v = y - \mathrm{Y}, \qquad w = z - \mathrm{Z},$$
$$2\,\mathrm{U} = f'_x + f'_{\mathrm{X}}, \qquad 2\,\mathrm{V} = f'_y + f'_{\mathrm{Y}}, \qquad 2\,\mathrm{W} = f'_z + f'_{\mathrm{Z}};$$

on déduit de là immédiatement les substitutions cherchées, propres ou impropres. Les premières sont données par la résolution des équations

$$2\,(x - \mathrm{X}) = \nu\,(f'_y + f'_{\mathrm{Y}}) - \mu\,(f'_z + f'_{\mathrm{Z}}),$$
$$2\,(y - \mathrm{Y}) = \lambda\,(f'_z + f'_{\mathrm{Z}}) - \nu\,(f'_x + f'_{\mathrm{X}}),$$
$$2\,(z - \mathrm{Z}) = \mu\,(f'_x + f'_{\mathrm{X}}) - \lambda\,(f'_y + f'_{\mathrm{Y}}),$$

λ, μ, ν étant des paramètres arbitraires, ou par la résolution des équations équivalentes

$$f'_x - f'_{\mathrm{X}} = 2\,\nu'(y + \mathrm{Y}) - 2\,\mu'(z + \mathrm{Z})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

où les paramètres λ', μ', ν' sont liés aux paramètres λ, μ, ν par les relations

$$\lambda' = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{F}'_\lambda, \qquad \mu' - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{F}'_\mu, \qquad \nu' = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{F}'_\nu$$

dans lesquelles $\mathrm{F}(\lambda, \mu, \nu)$ est la forme adjointe à $f(\lambda, \mu, \nu)$. Les substitutions impropres s'obtiennent par des formules analogues ; au reste, elles se déduisent des substitutions propres par le changement de X, Y, Z en $-\mathrm{X}, -\mathrm{Y}, -\mathrm{Z}$. La double forme sous laquelle sont obtenues les substitutions propres facilite la résolution par rapport

aux variables x, y, z et l'on parvient ainsi aux formules d'Hermite

$$x[1 + F(\lambda, \mu, \nu)] = X[1 - F(\lambda, \mu, \nu)] + (\nu f'_Y - \mu f'_Z) + 2\Pi\lambda',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ou

$$f'_x[1 + F(\lambda, \mu, \nu)] = f'_X[1 - F(\lambda, \mu, \nu)] + 4(\nu' Y - \mu' Z) + 4\Delta\Pi\lambda,$$

dans lesquelles Δ est le discriminant de la forme $f(x, y, z)$ et Π est mis à la place de $\lambda x + \mu y + \nu z = \lambda X + \mu Y + \nu Z$.

En composant deux substitutions du groupe déterminées respectivement par les paramètres (λ, μ, ν), (λ', μ', ν'), on obtient une substitution du groupe dont les paramètres l, m, n s'expriment rationnellement au moyen de $\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu'$: ces expressions, données par Ch. Hermite, résultent simplement, comme je l'ai montré, des formules précédentes.

Je dois faire observer que la plupart des résultats déduits dans ce petit Travail d'une façon très élémentaire avaient été démontrés implicitement ou explicitement par Laguerre dans son Mémoire *Sur le calcul des systèmes linéaires*, inséré dans le LXIIe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique* (*Œuvres*, t. I, p. 243 et suivantes).

Note relative aux formes binaires du troisième degré.

(*Bulletin*, 2e série, t. I, p. 260; 1877.)

C'est la solution d'une question que Ch. Hermite avait bien voulu m'indiquer.

On obtient la condition pour que l'équation du troisième degré en x

$$\lambda(a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3) + a'_0 x^3 + 3a'_1 x^2 + 3a'_2 x + a'_3 = 0$$

ait ses racines égales en égalant à zéro un polynome du quatrième degré en λ, polynome dont j'ai calculé les invariants i et j; en posant

$$a = 2(a_1 a'_2 - a'_1 a_2), \qquad b = a_1 a'_2 - a_2 a'_1 - a_0 a'_3 + a'_3 a_0,$$
$$a' = 2(a_0 a'_1 - a'_0 a_1), \qquad b' = a_1 a'_3 - a'_1 a_3,$$
$$a'' = 2(a_2 a'_3 - a'_3 a_2), \qquad b'' = a_1 a'_0 - a_1 a_0,$$

et en désignant par Δ le discriminant de la forme quadratique ternaire dont $a, a', a'', 2b, 2b', 2b''$ sont les coefficients, ces invariants s'expriment par les formules

$$6i = (a+b)[12\Delta + (a+b)^3]$$
$$36j = -[54\Delta^2 + 18\Delta(a+b)^3 + (a+b)^6],$$

en sorte que le discriminant $i^3 - 6j^2$ du polynome du quatrième degré en λ se met sous la forme

$$i^3 - 6j^2 = -\frac{\Delta^3}{2}[27\Delta + 2(a+b)^3];$$

le facteur entre crochets n'est autre que le résultant des deux équations

$$a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0, \qquad a'_0x^3 + 3a'_1x^2 + 3a'_2x + a'_3 = 0.$$

Ce résultat avait d'ailleurs été obtenu par Clebsch, au moyen de la notation symbolique.

Sur les fonctions symétriques des différences des racines d'une équation.

(*Comptes rendus*, t. XCVIII, p. 1421; 1884.)

Sylvester venait de démontrer que les fonctions symétriques des différences des racines de l'équation

$$(1) \qquad z^n + na_1z^{n-1} + n(n-1)a_2z^{n-2} + \ldots + n(n-1)\ldots 2.1.a_n = 0$$

étaient des fonctions entières des sommes $S_2, S_3, \ldots, S_n$ des carrés, des cubes, ..., des $n^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de l'équation

$$(2) \qquad \zeta^n + a_1\zeta^{n-2} + \ldots + a_n = 0;$$

j'ai montré comment on pouvait obtenir explicitement ces fonctions en posant d'une part

$$a_i = \frac{a_1^i}{1.2\ldots i} + C_2\frac{a_1^{i-1}}{1.2\ldots(i-1)} + C_3\frac{a_1^{i-2}}{1.2\ldots(i-2)} + \ldots + C_i,$$
$$S_i + a_1S_{i-1} + \ldots + a_{i-1}S_1 + ia_i = 0 \qquad (i = 1, 2\ldots, \infty);$$

puis, d'autre part,

$$\varphi(x) = 1 + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots$$
$$\psi(x) = S_2 x + S_3 x^2 + S_4 x^3 + \dots;$$

on a alors, en effet, identiquement

$$\psi(x)\varphi(x) + \varphi'(x) = 0,$$

d'où résultent, en égalant à o les coefficients des puissances de x, les relations entre les S et les C; or, les fonctions symétriques entières des différences des racines de l'équation (1) sont des fonctions symétriques entières des différences des racines de l'équation

$$(3)\quad \begin{cases} Z^n + n(n-1)C_2 Z^{n-1} \\ \quad + n(n-1)(n-2)C_3 Z^{n-3} + \dots + n(n-1)\dots 1 . C_n = 0, \end{cases}$$

que l'on obtient en faisant dans l'équation (1) la transformation $Z = z + a_1, \dots$; elles s'expriment donc en fonction entière de $C_2, C_3, \dots, C_n$, et par suite de $S_2, S_3, \dots, S_n$.

Sur le plan osculateur aux cubiques gauches.

(*Bulletin*, 1re série, t. XI; p. 283; 1876.)

En supposant que les coordonnées x_i d'un point de la cubique s'expriment au moyen des paramètres t, s par des équations de la forme

$$x_i = a_i t^3 + 3b_i ts^2 + 3c_i ts^2 + d_i s^3 \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

l'équation du plan osculateur au point de coordonnées $x'_i (i = 1, 2, 3, 4)$ s'obtient aisément sous la forme

$$\begin{vmatrix} x_1 & x'_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & x'_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & x'_3 & b_3 & c_3 \\ x_4 & x'_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} - \frac{1}{3} \begin{vmatrix} x_1 & x'_1 & a_1 & d_1 \\ x_2 & x'_2 & a_2 & d_2 \\ x_3 & x'_3 & a_3 & d_3 \\ x_4 & x'_4 & a_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0,$$

qui met en évidence diverses relations entre la théorie des cubiques gauches et celle des complexes linéaires, relations établies par M. Appell dans sa Thèse. Dans la même Note j'indique une génération d'une cubique gauche définie par certaines conditions géométriques.

Sur une surface de révolution du quatrième degré dont les lignes géodésiques sont algébriques.

(*Bulletin de la Société philomathique de Paris*, 8e série, t. IV, n° 2, p. 85. — *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XVI; 1892.)

M. Darboux, dans la Note XV de la *Mécanique* de Despeyrous, a montré que toutes les surfaces de révolution pour lesquelles x, y, z s'expriment au moyen des variables u et θ par les formules

$$x = \mathrm{R}\cos u \cos\theta,$$
$$y = \mathrm{R}\cos u \sin\theta,$$
$$z = \mathrm{R}\int_0^u \sqrt{[2\mu + f(u)]^2 - \sin^2 u}\, du$$

ont leurs lignes géodésiques fermées pourvu que μ soit un nombre rationnel et que $f(u)$ soit une fonction impaire de u. J'ai observé que z est évidemment une fonction algébrique de $\sin u$, si l'on pose

$$\mu = \frac{1}{2}, \qquad f(u) = \sin u.$$

On obtient ainsi la surface de révolution définie par les équations

$$x = \frac{a}{4}\cos u \cos\theta,$$
$$y = \frac{a}{4}\cos u \sin\theta,$$
$$z = 2a\sin\frac{u}{4}\left(\sin\frac{u}{4} + \cos\frac{u}{4}\right),$$

ou par l'équation

$$16a^2x^2 = (z-a)^2[2a^2 - (z-a)^2];$$

l'équation différentielle d'une ligne géodésique se met aisément sous la forme

$$\frac{d\theta}{du} = \frac{\cos\alpha}{\cos u}\,\frac{2 + \sin u}{\sqrt{\cos^2 u - \cos^2\alpha}},$$

en désignant par α l'angle sous lequel cette ligne coupe le parallèle maximum.

En intégrant, on trouve que la ligne géodésique peut être définie par l'une ou l'autre des équations

$$\sin(\theta-\alpha)=\frac{\sqrt{\sin^2\alpha-\sin^2 u}}{\sin^2\alpha}\,\frac{2\sin u-\sin^2\alpha(1+\sin u)}{\cos u(1-\sin u)},$$

$$\cos(\theta-\alpha)=\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\,\frac{\sin^2\alpha(1+\sin u)-2\sin^2 u}{\cos u(1-\sin u)},$$

qui mettent en évidence son caractère algébrique. Au reste, la projection de cette courbe sur son plan de symétrie a pour équation

$$4ax(a-z)^2\tang\alpha\sin\alpha=(a^2+2az-z^2)a^2-2(a^2-z^2)^2.$$

BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

Le *Bulletin* comprend, comme l'on sait, deux Parties, l'une consacrée aux ouvrages publiés séparément, l'autre aux publications périodiques. J'ai pris une part notable à la rédaction de cette seconde Partie, mais je me bornerai à signaler l'analyse détaillée que j'ai donnée des premiers Mémoires de M. G. Cantor [1], dont l'importance m'avait été signalée il y a très longtemps par M. Mittag-Leffler et dont ce dernier venait de publier dans les *Acta Mathematica* une traduction française; l'analyse que j'en ai faite a pu contribuer à faire connaître en France les idées de M. G. Cantor, dont l'importance n'est plus contestée.

Quant aux comptes rendus que j'ai publiés dans la première Partie, je me contenterai de citer les titres d'un certain nombre de Livres que j'ai analysés. Les renvois se rapportent tous à la première partie de la deuxième série du *Bulletin :* les chiffres romains indiquent le tome, les chiffres ordinaires concernent la pagination,

J'ai fait suivre cette liste de quelques citations: j'ai uniquement cité des passages qui m'ont paru avoir quelque intérêt général, philosophique ou littéraire.

Cayley. — An elementary Treatise on elliptic Functions, I, 93.

Dini. — Su alcune Funzioni che in tutto un intervallo non hanno mai derivata, I, 283.

Reulaux. — Cinématique, I, 361.

Kœnigsberger. — Zur Geschichte der Theorie der elliptischen Functionen, III, 89.

Lipschitz. — Lehrbuch der Analysis: Erster Band, IV, 385.

Schilling. — Sur la surface minima de cinquième classe, IV, 395.

---

[1] 2e série, t. VIII, p. 162.

Dini. — Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale, V, 12.

Hermite. — Cours professé pendant le deuxième semestre de l'année 1881, VI, 169.

Hölder. — Beiträge zur Potentialtheorie, VII, 63.

Kœnigsberger. — Allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen, VII, 5.

Schwarz. — Beweis des Satzes, dass die Kugel kleinere Oberflache hesitzt, als jeder andere Körper gleiches Volumens, IX, 25.

Hermite. — Sur quelques applications des fonctions elliptiques, XI, 27.

Halphen. — Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications; XI, 29; XII, 253.

Jordan. — Cours d'Analyse à l'École Polytechnique, t. III, XI, 262.

Harnack. — Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentiales und der eindeutigen Potentialfunktion in der Ebene, XII, 77.

Bertrand. — Calcul des probabilités, XIII, 25.

Schœnfliess. — Geometrie der Bewegung, XIII, 157.

Schwarz. — Gesammelte mathematische Abhandlungen, XIV, 248.

Weber. — Elliptische Functionen, XV, 105.

Picard. — Traité d'Analyse, t. I; XVI, 81.

Husserl. — Philosophie der Arithmetik, XVI, 239.

Baillaud. — Cours d'Astronomie, première Partie, XVII, 217.

Duhem. — Hydrodynamique, Élasticité, Acoustique, XVII, 221.

Meray. — Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques, t. I, XVIII, 80.

Kronecker. — Vorlesungen über Mathematik, XVIII, 221.

Schlesinger. — Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, t. I, XIX, 201.

Weber. — Lehrbuch der Algebra, t. I et II. XIX, 161; XXI, 93.

Krause. — Theorie der doppeltperiodischen Functionen einer veranderlichen Grösse, t. I et II; XX, 132; XXI, 280.

Raffy. — Leçons sur les applications géométriques de l'Analyse, XXI, 56.

Markoff. — Differenzenrechnung, XXI, 137.

Burkhardt. — Einleitung in die Theorie der analytischen Functionen, XXI, 199.

Netto. — Vorlesungen über Algebra, t. I et II; XXI, 121; XXIV, 134.

Appell et Lacour. — Principes de la théorie des fonctions elliptiques et applications, XXI, 51.

Whitehead. — A Treatise on universal Algebra. With Applications, XXII, 97.

Burali-Forti. — Introduction à la Géométrie différentielle suivant la méthode de Grassmann, XXII, 231.

Borel. — Leçons sur la théorie des fonctions, XXII, 242.

D'Ocagne. — Traité de Nomographie, XXIII, 172.

Klein und Sommerfeld. — Ueber die Theorie des Kreisels, XXII, 33, 311.

Borel. — Leçons sur les fonctions entières, XXIV, 120.

Rudio. — Verhandlungen der ersten internationalen Mathematiker-Kongresses in Zurich, XXIV, 129.

Burkhardt. — Elliptische Functionen, XXIV, 145.

Enriques. — Questioni riguardanti la Geometria elementare, XXIV, 168.

Andoyer. — Leçons sur la théorie des formes et la Géométrie analytique supérieure, XXIV, 220.

Schoenfliess. — Die Entwickelung des Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten, XXIV, 239.

Rouché et Lévy. — Analyse infinitésimale à l'usage des ingénieurs, XXV, 8.

Weber. — Die partiellen Differential-Gleichungen der Mathematischen-Physik nach Riemann's Vorlesungen in vierten Auflage, neu bearbeitet von H. Weber, XXV, 33.

Foucault. — La Psycho-physique, XXV, 101.

Sur le *Calcul des probabilités* de M. Bertrand, XIII, 25.

Les personnes peu versées dans les Mathématiques s'étonnent d'habitude quand elles entendent parler de l'élégance d'une démonstration ou d'un calcul. Les mathématiciens de profession, eux aussi, s'émerveilleraient sans doute qu'on osât louer ce qu'il y a de fin et de spirituel dans un Livre de Mathématiques. Il faut pourtant s'y résoudre cette fois; au reste, l'étonnement diminue quand on pense au nom de l'Auteur. Il convient aussi d'ajouter que la finesse n'est pas absente de tous les écrits mathématiques, bien que d'ordinaire on se plaise davantage à y admirer la vigueur avec laquelle les déductions y sont poursuivies : elle est nécessaire dès que l'on touche aux principes et que l'on veut regarder les choses en elles-mêmes. « Il n'est question que d'avoir bonne vue, mais il faut l'avoir bonne, car les principes sont si déliés, et en si grand nombre qu'il est presque impossible qu'il n'en échappe. Or l'omission d'un principe mène à l'erreur; ainsi il faut avoir la vue bien nette pour voir tous les principes, et ensuite l'esprit juste pour ne pas raisonner faussement sur les principes connus. » Cette phrase de Pascal s'applique parfaitement au Calcul des probabilités; il faut avoir la vue *bien nette* pour s'en occuper, pour ne point faire d'omissions dans les énumérations, et distinguer des choses qui se ressemblent singulièrement, plus que ne font d'habitude la vérité et l'erreur.

Ceux qui ont la vue bonne aiment à l'exercer : c'est peut-être là une des raisons qui ont amené le Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences à traiter de ce calcul, qu'il regrette de voir aussi délaissé qu'il est. Ce n'est pas la seule, assurément; il y a là souvent, entre deux équations, belle matière à

raillerie. Les lecteurs de M. Bertrand ne regretteront pas qu'il s'y complaise et qu'il crève les prétentions de ceux qui voudraient porter le *flambeau de l'Algèbre* là où il n'a que faire: parfois même, la fantaisie se donne carrière: c'est merveille alors. Le pauvre *homme moyen* de Quetelet n'est pas épargné; écoutez la fin de son portrait: « Dans le corps de l'homme moyen, l'auteur belge place une âme moyenne. Il faut, pour résumer les qualités morales, fondre vingt mille caractères en un seul. L'homme type sera donc sans passions et sans vices, ni fou, ni sage, ni ignorant, ni savant, souvent assoupi: c'est la moyenne entre la veille et le sommeil; ne répondant ni oui, ni non; médiocre en tout. Après avoir mangé pendant trente-huit ans la ration moyenne d'un soldat bien portant, il mourrait, non de vieillesse, mais d'une maladie moyenne que la Statistique révélerait pour lui. » N'est-ce pas achevé? Cela, à la vérité, est tiré de la Préface, où la verve de l'écrivain se déploie à l'aise; mais souvent elle perce ailleurs.

Ce n'est pas tout: plus d'un problème classique du Calcul des probabilités conduit à des résultats fort paradoxaux, et l'on soupçonne la joie qu'a eue l'Auteur à se jouer parmi ces paradoxes, à percer à jour ceux qui n'ont point de solidité, et à bien mettre en lumière la part de vérité que contiennent les autres. Enfin le Calcul des probabilités permet de poser et de résoudre des problèmes bien « plaisants et délectables » et l'Auteur ne s'est pas refusé ce plaisir. On trouvera dans son Livre jusqu'à des solutions politiques, que M. Bertrand, il est vrai, a la modestie de ne pas préconiser. Voulez-vous, par exemple, dans un pays de suffrage universel, où les deux partis opposés sont presque numériquement égaux, avoir une Chambre bien homogène? Supposons dix millions d'électeurs, 4500000 d'une opinion, 5500000 de l'autre. Le problème semble difficile. Eh bien, groupez les électeurs par vingt mille, *tirés au sort* dans les dix millions; que chaque groupe élise un député; sur les cinq cents députés nommés de cette façon, pas un n'appartiendra à la minorité; ou plutôt, s'il en entre un à la Chambre, le parti de la minorité devra s'estimer beaucoup plus heureux qu'un joueur qui tirerait, l'un après l'autre, deux quines à la loterie. N'y a-t-il pas là un beau projet, une bonne loi électorale *bien juste* que, sans les difficultés d'application, on ferait aisément accepter par d'honnêtes libéraux, soucieux d'enlever au pouvoir central la possibilité de fausser le vote par le remaniement des circonscriptions?

En lisant la Préface du Livre de M. Bertrand, intitulée *Les lois du hasard*, on ne peut s'empêcher de penser à cette inoubliable Introduction que Laplace a mise en tête de la *Théorie analytique des probabilités*. Quel contraste! Ce ne sont plus ces magnifiques périodes, légèrement solennelles, où Laplace expose les principes d'une philosophie un peu trop sûre d'elle-même, et déroule les conséquences d'une science admirable, mais parfois trop confiante dans sa portée: ce sont des anecdotes, des petits faits probants,

des petites phrases nettes, précises, courtes, pressées, dont chacune semble comprimée par la pensée qui va suivre, et qui a hâte de sortir; point de principes hasardeux : une critique toujours éveillée, et comme joyeuse d'avoir à s'exercer....

Sur les *Leçons nouvelles* de M. Méray, XVIII, 80.

M. Méray est, à coup sûr, un des mathématiciens qui honorent notre pays. La publication d'un grand Ouvrage de lui sur l'Analyse infinitésimale ne peut manquer d'être accueillie avec faveur et avec intérêt par le monde savant, et les lecteurs seront heureux de retrouver, cette fois avec les développements et les compléments qu'ils souhaitaient, les idées systématiques émises par l'Auteur dans son *Précis d'Analyse infinitésimale*. M. Méray a consacré de longs et fructueux efforts à édifier sa théorie des fonctions; il a apporté, sur des points essentiels et difficiles, d'importantes contributions; c'est avec une fierté légitime qu'il reproduit, en tête de ses *Leçons nouvelles*, les titres et les dates de ses nombreuses publications. Depuis 1868, M. Méray était en possession de ses idées fondamentales sur le rôle essentiel que doivent jouer, dans la théorie des fonctions, les séries qui procèdent suivant les puissances entières et positives des variables. Ces idées, depuis 1869, ont été le fond et la substance de son enseignement. Elles sont aujourd'hui dominantes, et M. Méray a le droit de s'en réjouir, si même il n'a pas été le seul à en assurer le triomphe; on sait assez qu'elles ont été développées ailleurs par un géomètre illustre qui s'est acquis une gloire incontestée, non seulement dans l'organisation de la théorie générale, mais aussi par les progrès considérables qu'il a réalisés dans l'étude approfondie de ces fonctions particulières, pour lesquelles il semble que la théorie générale soit faite.

Chez M. Méray, l'idée du développement en série de Taylor est en quelque sorte primordiale et exclusive; pour lui, en dehors d'un pareil développement, il n'y a point de fonction. C'est un point sur lequel il revient continuellement et avec quelque passion. Il fait bon marché de tout le reste. Les fonctions *analytiques*, comme on dit aujourd'hui, suffisent à tout et se suffisent à elles-mêmes. En dehors d'elles, les règles générales ne s'appliquent pas, ou s'appliquent mal, et l'on ne trouvera rien qui soit vraiment utile, vraiment intéressant. On doit donc, dans l'enseignement, tout sacrifier aux fonctions analytiques. Que leur rôle soit actuellement prépondérant, personne ne pense à le contester; qu'elles puissent suffire d'ici longtemps, le plus souvent, aux applications des Mathématiques, à la Mécanique, à l'Astronomie, à la Physique, on n'en saurait douter non plus, et le passé nous répond de l'avenir.

Cependant, n'y a-t-il pas quelque excès à vouloir bannir toute autre spéculation ? Pour ce qui est de la Science pure, il convient peut-être de la laisser se constituer librement, suivant le génie propre de ceux qui en ont la curiosité. En fait, quoique l'Analyse ait la prétention d'être la science de l'*a priori*, c'est en quelque sorte d'une façon contingente et, en tous cas, impossible à prévoir que les questions se posent et que les solutions se découvrent; c'est l'observation seule et l'expérience qui montrent l'importance et la valeur des idées qu'on y introduit. Le développement d'une fonction en série de puissances entières est, après tout, un mode particulier d'existence de cette fonction : comment justifier *a priori* le caractère primordial de ce mode d'existence ? C'est l'expérience seule qui a révélé son importance. M. Méray a réalisé cette expérience; c'est un service éminent; mais d'autres expériences, qui ne se grouperont pas autour des mêmes lois, ne sont-elles pas légitimes, et, par exemple, les séries entières elles-mêmes ne posent-elles pas, sur le cercle de convergence, la question des développements en série trigonométrique ? N'y a-t-il pas là un mode d'existence d'une nature tout autre, et ce mode d'existence n'intervient-il pas, lui aussi, dans les applications aux problèmes posés par les sciences de la nature ?

Pour ce qui est des applications, il s'agit d'arriver, par les moyens les plus simples pour notre intelligence, à des solutions aussi approchées que possible. A la vérité, il y a des gens qui croient que la *chose en soi* est une fonction analytique; mais je n'ai heureusement aucune raison pour prêter cette opinion à M. Méray ; il est encore permis de penser que nous n'atteindrons jamais la *chose en soi*, et que le progrès des sciences de la réalité consiste dans la constitution de schémas qui s'adaptent de mieux en mieux à la façon dont nous nous représentons les choses : la valeur de ces schémas, toute relative à nous, est double : elle est dans l'exactitude avec laquelle ils réalisent cette représentation et dans leur simplicité. Les fonctions analytiques se présentent actuellement comme ayant une simplicité incomparable, et c'est ce qui fait leur importance ; j'ai entendu dire, il est vrai, que cette simplicité tenait à ce que notre cerveau était lui-même composé de fonctions analytiques. Je n'attribue pas non plus cette opinion à M. Méray : il est encore permis de suspendre son jugement sur ce sujet, et les esprits timorés peuvent, sans absurdité, craindre que, après avoir étudié des fonctions analytiques simples, on en rencontre de fort compliquées, qui ne s'adaptent aux choses que difficilement, avec de grands efforts : s'il arrivait qu'il en fût ainsi, et si d'autres fonctions nous fournissaient des formules plus simples, on n'hésiterait pas, sans doute, à les adopter, quelle que fût leur origine. C'est la future histoire des progrès de la Science qui seule pourrait nous dire ce qui en est, et personne ne sait l'histoire future de ces progrès. Quoi qu'il en soit, ceux qui ont une foi robuste sont aussi ceux qui contribuent le plus à ces progrès, et l'on serait mal venu à reprocher la sienne à M. Méray, d'autant que la religion

des fonctions analytiques n'est pas près d'être épuisée : tout au plus peut-on regretter qu'il mette tant d'ardeur à décourager et à poursuivre les hérétiques. Il y a longtemps qu'on a dit que les hérésies étaient nécessaires.

Sa doctrine, en tout cas, se tient fort bien, elle est pure de tout mélange ; l'idée de nombre lui suffit, et M. Méray a grand soin d'écarter toute considération étrangère ; il convient de dire un peu plus: tout en fondant uniquement, comme il fait, l'Analyse sur cette seule idée, on peut avoir hâte de faire intervenir ces fonctions particulières qui ont une représentation géométrique simple, et s'aider, sans le dire, de cette représentation. Cette marche détournée n'est pas la sienne ; il écarte tout ce qui est *transcendant;* il ne veut point d'autre clarté que la clarté de l'Algèbre élémentaire, qui, sans doute, est incomparable. S'il parle des variables imaginaires, il bannit *l'argument*, dont il n'a que faire et qui sent sa Géométrie. Voici un Volume de quatre cents pages qui commence à la notion de nombre entier, qui se termine par des propositions générales sur les équations aux dérivées partielles ; l'Auteur n'y a parlé d'aucune fonction particulière ; on n'y rencontre ni la fonction exponentielle, ni les fonctions circulaires. Cela est trop particulier et viendra plus tard, comme une application infime des théorèmes généraux : il ne faut pas troubler l'ordre et l'enchaînement de ces théorèmes qui se déroulent majestueusement. Nous ne toucherons terre que plus tard ; nous restons ici dans la sérénité des principes. J'insiste sur ce goût de M. Méray pour les généralités, car il est vraiment caractéristique. C'est toujours à l'idée générale qu'il court, il ne s'attarde jamais à particulariser ; si une proposition et une démonstration s'appliquent à des systèmes de fonctions et de variables, c'est à ce système de fonctions et de variables qu'il s'attaquera de suite, sans traîner sur le cas d'une fonction et d'une variable. Il s'exprime d'ailleurs très exactement quand il dit que l'intelligence de son Ouvrage « n'exige presque pas autre chose que la pratique du calcul algébrique élémentaire, avec la connaissance approfondie des équations du premier degré » : le *presque pas autre chose*, c'est la force d'abstraction nécessaire pour rester longtemps dans la région des principes généraux, et ce n'est pas rien, si claire que soit cette région, et si lumineux que soit le chemin par lequel M. Méray nous y conduit.

Il faut s'habituer peu à peu à cette région élevée, à l'air subtil qu'on y respire, et ne vouloir y monter que lentement. A coup sûr, M. Méray ne conseillerait à personne de commencer l'étude de ses *Leçons* sans autre bagage « que la pratique du calcul algébrique élémentaire et la connaissance approfondie des équations simultanées des équations du premier degré », bien que, assurément, au point de vue de la pure logique, ce bagage soit suffisant. Comme pour les autres sciences, l'enseignement des Mathématiques doit procéder du particulier au général ; il faut étudier des types

caractéristiques pour bien comprendre les lois de l'espèce, il faut voir le général en lui-même, mais aussi dans le particulier....

Sur la publication des *Œuvres de Grassmann*, XIX, 144.

Grassmann appartient au petit groupe d'hommes dont la pensée n'a été bien comprise qu'après eux, et qui étaient destinés à une gloire posthume. Il y aura, sans doute, toujours des hommes qui ne seront point compris de leur vivant; mais ils peuvent se consoler en relisant l'histoire des illustres méconnus, d'autant plus sûrement qu'en renvoyant la réalisation de leurs espérances à un temps qu'ils ne verront pas, ils sont certains de ne pas connaître de déception. C'est ainsi que l'injustice qui a frappé quelques grands hommes sert à adoucir beaucoup d'amertumes....

Sur les *Lectures* de M. Klein, XX, 299.

S'il n'était pas nécessaire d'être mathématicien pour comprendre ce que sont les Mathématiques, pour avoir quelque idée des problèmes qu'elles résolvent et qu'elles posent, du domaine qu'elles ont conquis, et des vastes territoires où elles pénètrent, il faudrait conseiller à tous de lire ces douze conférences, si riches de faits et de suggestion, si variées dans leurs sujets, mêlant l'histoire de la Science, les vues philosophiques, les aperçus ingénieux, les théorèmes précis, les généralisations hardies, les conseils pédagogiques, abordant tour à tour les branches les plus variées de la Science, l'Arithmétique, l'Algèbre, la haute Analyse, la Géométrie. Je ne sais s'il est juste de faire à la Géométrie une place à part dans cette énumération : car, avec M. Klein, la Géométrie, ou plutôt l'intuition géométrique, est partout.... Un réseau de points, figuré dans un plan et regardé comme il faut, nous donne une représentation concrète des nombres idéaux de M. Kummer ; la considération de la figure formée par trois arcs de cercle sur une sphère vient éclairer les propriétés les plus cachées des fonctions hypergéométriques ; l'icosaèdre régulier donne un corps aux recherches sur la résolution de l'équation du cinquième degré ; à ce propos, voici la conception si profonde de Galois qui s'élargit : son groupe de permutations est remplacé par un groupe de substitutions linéaires et le problème de la résolution des équations, ou plutôt de leur réduction à des formes normales, est posé en des termes nouveaux. Après avoir parlé du caractère transcendant du nombre e, M. Klein imaginera que le plan soit recouvert par tous les points dont les coordonnées sont des nombres algébriques, et il observera que, si pressés les uns contre les autres que soient ces points, la courbe qui a pour équa-

tion $y = e^x$ ne passe que par un seul d'entre eux; s'il s'agit des fonctions elliptiques, hyperelliptiques ou abéliennes, on ne s'étonne pas sans doute, tout en admirant leur richesse et leur beauté, de voir surgir les interprétations géométriques; mais M. Klein poussera la coquetterie jusqu'à prendre dans la Géométrie même un exemple de ce qui ne peut être ni figuré, ni imaginé: une courbe sans tangentes.... Pour lui, les êtres mathématiques ne sont pas des abstractions; il les voit et il les fait voir, qui se jouent tantôt dans les espaces non euclidiens, tantôt dans cet espace vulgaire dont se contentent quelques géomètres, qui ne veulent pas sans doute que l'espace n'existe que dans notre pensée. Le don de *voir*, qui lui a été départi si généreusement, M. Klein le rapporte avec modestie à la race teutonique, dont la puissance naturelle d'intuition serait un attribut prééminent; mais ne pousse-t-il pas la modestie trop loin lorsqu'il oppose à l'attribut de sa race la puissance logique et critique des Latins et des Israélites? Qui le croirait, s'il se refusait à lui-même cette puissance? Et n'oublie-t-il pas un peu que lorsqu'il s'est amusé à classer les mathématiciens en *logiciens*, en *formels* et en *intuitifs*, ce n'est pas parmi les représentants des races latine et hébraïque qu'il a trouvé le type du logicien, d'ailleurs très illustre, caractéristique et bien choisi?

Dans ces *Lectures*, dont le but était de faire connaître à ses auditeurs l'état des Mathématiques modernes, les questions les plus actuelles, M. Klein est naturellement amené à parler souvent de ses propres recherches; personne ne s'en plaindra et, à vrai dire, le tableau eût été trop incomplet s'il les avait passées sous silence; il fait d'ailleurs une large part à ses nombreux élèves, dont plusieurs sont déjà des maîtres illustres; on sait que, pour lui, un élève est un collaborateur, et qu'il associe généreusement à ses propres recherches ses auditeurs de Gœttingue. Mais il ne s'enferme pas dans l'École dont il est le maître, et il a su trouver pour M. Sophus Lie une flatterie singulièrement délicate. C'est deux Lectures entières qu'il consacre au grand géomètre norvégien, tout en déclarant d'abord qu'il entend n'en considérer le génie qu' « à l'état naissant ». A la vérité, le monument qu'a élevé M. Sophus Lie ne fera pas oublier son Mémoire *Ueber Complexe insbesondere Linien- und Kugeln-Complexe*. Ce Mémoire, dont M. Klein expose quelques résultats essentiels, lui donne l'occasion de rappeler son propre *Programme d'Erlangen*, où il a expliqué comment chaque système de Géométrie est caractérisé par son groupe, et d'opposer en quelque sorte, l'un à l'autre, les groupes de ces deux Géométries des sphères qu'ont fondées M. Lie d'une part, M. Darboux de l'autre. Une fois, dans le cours de ses *Lectures*, il abandonnera les Mathématiques pures pour parler des Mathématiques appliquées et des sciences objectives; là même ses préoccupations habituelles le ressaisissent un instant et il ne peut s'empêcher de rappeler en passant comment la considération des courants électriques sur les surfaces fermées vient *illustrer*

les théories de Riemann; mais ce n'est qu'un *a parte* : il classe les diverses sciences appliquées d'après la quotité de chiffres qui figurent dans les nombres qu'elles considèrent : ainsi l'Astronomie emploie des nombres de sept chiffres ; la Chimie n'emploie guère que des nombres de deux ou trois chiffres. M. Klein insiste sur le caractère toujours provisoire des nombres, des lois et des formules que l'on trouve dans les sciences expérimentales; il émet l'idée ingénieuse que, puisque ces sciences ne peuvent se servir que de formules approchées, il doit être possible de constituer, à l'usage de ceux qui s'y livrent, une Mathématique abrégée.

Je ne sais si j'ai pu donner quelque idée de la variété et de l'intérêt des sujets que M. Klein développe, indique, touche d'une main légère, ou approfondit : il y aurait une insupportable prétention à vouloir analyser une par une les Lectures, où l'on a toujours affaire à trois maîtres à la fois, au moins : un géomètre, un philosophe, un artiste. Lequel faudrait-il louer davantage? Je ne sais, et si on le demandait à M. Klein, et qu'il pût répondre, ne serait-il pas embarrassé de le faire? S'il ressemblait à d'autres, il préférerait sans doute celui des trois qui est le moins développé; mais encore une fois, lequel?...

Sur la nouvelle édition des *Œuvres de Galois*, XXII, 7.

... M. Picard cite, avec les éloges qu'il mérite, le travail biographique que M. Paul Dupuy a publié en 1896 dans les *Annales de l'École Normale supérieure*. Si Galois n'entra qu'à contre-cœur dans cette École, s'il en fut chassé au bout d'un an, il en reste, malgré tout, une des plus grandes gloires et la Maison qu'il a traversée lui doit des honneurs, par cela seul qu'il y a passé : elle s'est rappelé Galois, quand elle a fêté son centenaire, et Sophus Lie a parlé de lui comme il convenait, en savant ; mais il restait à écrire la vie de Galois.

C'est ce qu'a fait M. Dupuy, et je crois bien que M. Picard a raison quand il dit que son travail est définitif. Il était grand temps qu'il fût accompli. M. Dupuy a pu consulter ceux des contemporains de Galois qui survivent et se souviennent de lui, il a pu recueillir des membres de sa famille les renseignements les plus précieux; on lui a confié l'inestimable portrait que MM. Gauthier-Villars ont reproduit en tête de ses *Œuvres;* avec la passion et la patience d'un érudit, il a feuilleté les journaux du temps, les registres d'écrou de Sainte-Pélagie, les registres d'entrée à l'hôpital.... Grâce aux souvenirs de ceux qui avaient connu Galois, grâce à ses patientes recherches, il a su faire revivre un peu ce merveilleux génie et l'étrange milieu révolutionnaire où il s'est agité pendant de si courtes années ; il a pu enfin nous faire comprendre ces défauts de caractère que l'on reproche justement

à Galois, mais qui, dès qu'on les comprend, ne découragent plus la sympathie. Aussi faut-il savoir gré à M. P. Dupuy de l'œuvre pieuse qu'il a menée à bonne fin.

Quant à l'admiration qui est due à Galois, les soixante pages où tiennent ses *Œuvres mathématiques* suffisent à lui assurer une durée égale à celle de la Science.

Sur un livre de M. Januschke, XXII, 7.

... M. Januschke a pour son sujet un certain enthousiasme, qui n'est pas pour déplaire; il est persuadé que l'étude de la Physique est excellente pour former l'*esprit* et le *cœur;* cette étude aussi rendra la vie plus douce aux hommes, en leur faisant connaître et aimer cette Nature qui causait tant de terreurs à leurs superstitieux ancêtres. Voilà une opinion qui est rassurante pour l'avenir, et qui a le mérite d'encourager dès à présent ceux qui la partagent.

M. Januschke a emprunté une curieuse épigraphe à R. Mayer : c'est une déclaration de guerre à ce qui reste des dieux de la Grèce, réfugiés dans les fluides impondérables; c'est là, il faut l'avouer, un triste déguisement pour ces radieuses divinités, plus triste encore que ceux qu'avait rêvés la fantaisie de Henri Heine; ces lamentables idoles sont maintenant détrônées par le principe de la Conservation de l'Énergie. Si ce principe devient une religion, il convient, peut-être, de lui pardonner le mystère dont il reste enveloppé; tous les termes, à vrai dire, n'en sont pas d'une parfaite clarté; si les forces, dont la notion est assurément un résidu métaphysique, n'y figurent pas immédiatement, il est difficile de dire ce que c'est que les masses, à moins de se résoudre à les regarder « comme des coefficients qu'il est commode d'introduire dans les calculs (1) », ce que c'est que l'énergie potentielle, à moins de la regarder comme une fonction des coordonnées, ce qui est peut-être insuffisant. Mais M. Januschke ne se perd pas dans ces questions théologiques. C'est la pratique du culte qu'il veut enseigner; le principe de la Conservation de l'Énergie est posé comme une induction résultant des découvertes de Galilée; quelques exemples concrets, simples et bien choisis permettent d'en donner quelque habitude au lecteur. Disons de suite que l'Auteur a grand soin, dans toutes les parties de son Livre, de donner d'intéressants détails historiques sur les découvertes scientifiques et l'évolution des idées qui s'y rattachent; c'est là une excellente méthode, qui marque d'ailleurs les tendances philosophiques de M. Januschke, assez

(1) Poincaré, *Les idées de Hertz sur la Mécanique* (*Revue générale des Sciences*, 30 septembre 1897).

nettement inclinées vers le positivisme. S'il est vrai que l'Auteur incline dans ce sens, pourquoi énonce-t-il cette proposition : « L'énergie totale de l'Univers est constante » ? Elle semble bien supposer, pour avoir un sens, que l'Univers soit fini, et cette hypothèse-là dépasse la Science positive. Celle-ci est essentiellement limitée dans le temps et dans l'espace, à des choses voisines de nous, à moins que nous ne prétendions substituer un Univers de définition à celui dont l'induction nous permet de pénétrer une faible partie....

ARTICLES PHILOSOPHIQUES.

J'ai écrit dans diverses Revues quelques articles sur diverses questions philosophiques ou pédagogiques [1].

Ceux que j'ai écrits dans la *Revue scientifique* remontent à l'époque où j'étais agrégé-préparateur à l'École Normale. Aucun n'est signé. Je mentionnerai deux Lettres au Directeur de la *Revue*, sur la Psychophysique [2]. Elles ont fait quelque bruit, dans un petit cercle, pendant quinze jours, probablement parce qu'elles étaient anonymes et quelque peu impertinentes. Elles m'ont procuré le plaisir d'entrer en relations avec Delbœuf, qui les a reproduites, avec mon nom, dans ses *Éléments de Psycho-physique*. Je ne connaissais d'ailleurs le sujet que par les excellents articles que M. Ribot venait de publier dans la *Revue*. J'expliquais les raisons qui me faisaient douter de la loi logarithmique par laquelle Fechner a prétendu rattacher la sensation et l'excitation, en insistant sur l'absence d'une définition de la « sensation » et de l' « excitation » en tant que grandeurs numériques; sur le caractère peu mesurable de la « sensation »; sur ce que, en particulier, le zéro n'était pas défini; sur la possibilité de substituer un mode de mesure à un autre, par conséquent de faire un changement de variable dans la formule hypothétique qui relierait la « sensation » et l' « excitation »; sur l'invraisemblance, dans ces conditions, d'une loi générale telle que celle que proposait Fechner. J'accordais que la formule de Fechner, considérée comme définition de la « sensation »,

---

(1) Ces derniers se trouvent, pour la plupart, dans la *Revue internationale de l'Enseignement supérieur* : je n'en parlerai pas ici.

(2) 2e Série, t. VIII, p. 876 et p. 1018. — La seconde moitié du dernier paragraphe de la première Lettre a été écrite, non par moi, mais par le Directeur de la *Revue* qui, puisque mes Lettres n'étaient pas signées, était seul responsable de ce qu'il insérait.

pouvait peut-être rendre quelques services. Ces Lettres ont été rappelées récemment, dans une Thèse de doctorat, soutenue, cette année même, devant la Faculté des Lettres, par M. Foucault. J'ai consacré, dans le numéro de juillet 1901 du *Bulletin des Sciences mathématiques*, un article étendu au Travail de M. Foucault, Travail qui constitue un exposé critique très complet des diverses recherches faites sur la Psycho-physique. Sur le fond de la question, je suis resté du même avis qu'il y a vingt-six ans; tout au plus atténuerais-je volontiers quelques plaisanteries, que ma jeunesse, l'ignorance du sujet et des hommes qui l'avaient traité expliquent suffisamment.

J'ai écrit trois articles dans la *Revue générale des Sciences*, l'un sur la Correspondance de Lagrange, qui venait de paraître dans l'édition de ses *Œuvres*, un autre « A propos des *Leçons de Géométrie* de M. Darboux », le troisième *Sur l'Infini mathématique*.

Le second de ces articles (t. II, p. 65) contient une brève analyse des deux premiers Volumes du Livre de M. Darboux, précédée de quelques réflexions sur les difficultés qu'apportent à ceux qui étudient les Mathématiques le développement même de la science et la multiplicité des Mémoires qu'il leur faut étudier, et sur le caractère des Livres qui peuvent remédier à ces difficultés.

L'article *De l'Infini mathématique* (t. VIII, p. 129) a été écrit à propos de la Thèse de M. Couturat, qui porte le même titre. En dehors des discussions relatives à différents points traités par M. Couturat, j'y insiste sur une idée dont je dois la claire intelligence à M. Drach [1], qui a souvent fait l'objet de mes causeries avec M. Painlevé (comme aussi, d'ailleurs, plusieurs autres passages du même article et de celui dont je parlerai ensuite) : c'est la différence entre les mots « défini » et « déterminé »; on peut concevoir une suite infinie, ou une collection infinie qui soit déterminée, sans qu'elle soit définie, sans même qu'il soit possible de la définir : il n'en est pas moins légitime de spéculer sur une telle suite ou un tel ensemble. Cette distinction, bien comprise, me porte aujourd'hui à regarder comme trop étroite la formule que j'ai employée dans la Préface de mon *Introduction à la Théorie*

---

[1] Elle avait été indiquée antérieurement par M. Molk (*Acta mathematica*, t. VI, 1887, p. 8) : celui-ci m'a dit la tenir de Kronecker.

des fonctions d'une variable, et que l'on a quelquefois citée : « La notion de l'infini, dont il ne faut pas faire mystère en Mathématiques, se réduit à ceci : après chaque nombre entier, il y en a un autre ». A coup sûr, cette notion, ainsi comprise, suffit à exposer une bonne partie des Mathématiques; elle est incomplète, si l'on veut spéculer sur des suites ou des ensembles qui ne sont pas définis, mais simplement déterminés. La question soulevée ici se rattache d'ailleurs à celle de l' « infini actuel » dont je soutiens la réalité possible, dans l'article dont je parle, conformément à la doctrine de M. G. Cantor et contrairement à celle de beaucoup de philosophes. J'ai d'ailleurs exposé, dans le même article, les principes de la théorie de M. Cantor sur les ensembles, à l'usage de ceux qu'on appelait au XVIIe siècle « les honnestes gens ».

L'article que j'ai publié en 1895 dans la *Revue de Paris*, sous ce titre : *Le rôle du nombre dans les Sciences* [1], est celui auquel j'attribue le plus d'importance. Je résume ci-dessous les idées que j'y ai défendues.

Nous parvenons à une connaissance du monde extérieur qui est indépendante de nous, au moins lorsque nous n'affirmons dans les choses extérieures que des différences ou des analogies. « Toutefois, dans cette connaissance des choses, non de nous, dans cette connaissance qui ne dépend pas de la façon dont les différents phénomènes du monde extérieur éveillent nos différentes sensations, subsiste nécessairement une ignorance radicale, dont nous n'avons aucun moyen de nous débarrasser : concevons deux univers, l'un qui sera, si l'on veut, l'univers réel, l'autre un univers imaginaire, mais tel que chaque phénomène qui s'y passe réponde exactement à un phénomène du monde réel et réciproquement; je n'ai, je ne puis avoir aucune raison de croire à l'existence du premier plutôt qu'à celle du second; je ne connais pas l'un plutôt que l'autre : ils sont équivalents pour

---

[1] T. IV, p. 188.

moi comme deux livres écrits dans deux langues, mais dont l'un est la traduction exacte de l'autre.... On voit assez, sans que j'y insiste, que, de ce point de vue, le débat sur la préférence qu'il convient d'accorder à une hypothèse scientifique, ou à une autre, perd souvent toute signification. » A nos sensations nous substituons des signes, des mots qui leur correspondent. Dans le langage scientifique, les mots sont de plus en plus abstraits; leur véritable fonction est de désigner des ressemblances ou des différences, de grouper les objets par quelque relation commune, qui les distingue des autres; « tantôt les groupes ainsi formés sont nettement séparés, tantôt ils sont contenus les uns dans les autres, tantôt ils empiètent les uns sur les autres; c'est la pensée des rapports de cette nature que les mots abstraits éveillent dans notre esprit; c'est sur ces rapports que sont fondés les raisonnements scientifiques ». Un raisonnement scientifique est un raisonnement de mots, un raisonnement de signes, et c'est par là qu'il exprime des relations qui ne dépendent pas de celui qui le fait, ou qui le comprend. « Pour le poète, la puissance d'évocation qu'il y a dans les mots est trop faible; pour le savant, les mots sont encore trop imprégnés de sensation, ils ne sont pas assez décolorés; ils désignent trop des objets ou des groupes particuliers, tout en exprimant des relations entre les objets ou les groupes, ils font penser non seulement à ces relations, mais encore aux objets ou aux groupes, et cela est de trop : c'est le nombre et la science des nombres qui vont fournir un ensemble de signes vraiment approprié à n'exprimer que des relations. »

La notion de nombre suffit à engendrer l'Arithmétique, l'Algèbre, l'Analyse entière; la Géométrie à trois dimensions est un cas particulier de la théorie analytique des systèmes de trois variables; c'est-à-dire qu'on peut constituer un chapitre de cette théorie, dont le langage et les énoncés seront les mêmes que le langage et les énoncés de la Géométrie, sans que ce langage et ces énoncés impliquent la réalité d'aucun espace. Dans la Cinématique, s'introduit une variable de plus, le *temps :* tant que l'on n'aborde pas les applications de la Mécanique, la nature de cette variable est entièrement indéterminée, sauf la condition de varier toujours dans le même sens. Dans la Mécanique rationnelle, la notion de matière n'intervient que par

des propriétés géométriques, et par un nombre, la *masse*, que l'on suppose attaché à chaque particule matérielle, qui la suit dans tous ses mouvements. « En dehors de ses applications, la Mécanique rationnelle peut être, elle aussi, regardée comme un chapitre spécial de la science du nombre, comme l'étude d'un certain système d'équations différentielles. » La Mécanique céleste a affaire à un système d'équations différentielles plus particulier. Dans les applications, les variables et les coefficients doivent être remplacés par des nombres déterminés; je dis quelques mots sur la mesure du temps et de la masse, en insistant sur ce qu'il y a d'arbitraire dans les procédés de mesure adoptés, en vue de la simplicité (relative à nous) des résultats, sur l'impossibilité de justifier *a priori* ces procédés. Le principe de la conservation de la masse n'est pas un principe *a priori :* il suffit, pour s'en convaincre, de penser à la complication des expériences nécessaires pour la détermination de la masse. De même, il suffit de penser à la complication des équations par lesquelles s'exprime le principe de la conservation de l'énergie, pour être bien sûr qu'il ne peut pas être justifié par des considérations métaphysiques. Il n'y a pas de principe *a priori* dans la science du réel. « On vous dira peut-être : J'ignore si c'est ce que vous appelez la *masse* et ce que vous appelez l'*énergie* qui reste constant, mais je sais qu'il y a quelque chose qui reste constant, je sais qu'il y a des *lois* et cela me suffit. La prétention alors est plus modeste, si modeste qu'elle en est insignifiante : qu'est-ce que dire que quelque chose est constant, si l'on ne sait quoi ?

« Et pourquoi serait-il si clair que rien ne se perd et que rien ne se crée? Tout changement n'est-il pas la destruction de ce qui était et la création de ce qui va être ? »

....

« Qu'il s'agisse donc de la Géométrie, de la Mécanique, de l'Astronomie, de la Physique mathématique, c'est toujours un chapitre de la science des nombres qui porte le nom d'un chapitre de la science du réel. Mieux une science est constituée, plus il apparaît nettement qu'elle est une science de signes : ses définitions une fois admises, elle n'est plus qu'une suite de déductions logiques entièrement nécessaires : mais il ne faut pas oublier que cette nécessité logique qui y

règne en maitresse ne concerne que les signes; rien n'autorise à la transporter dans les choses, en lui conservant le même caractère. Le rôle que jouent les Mathématiques dans ces sciences ne doit pas faire illusion : sans doute, les déductions mathématiques sont d'une entière rigueur, mais à condition que l'on reste dans les Mathématiques; tant que l'on y reste, on ne peut contester les conclusions, à moins de contester la raison elle-même : si vous faites tels calculs sur tels nombres, vous trouverez tel résultat; voilà, encore une fois, ce qu'affirment les Mathématiques, ce qui est d'une nécessité logique; elles ne peuvent rien affirmer au delà; elles ne peuvent affirmer l'accord entre les résultats d'un calcul et les résultats d'une expérience; cet accord est un fait, et il n'a pas, il ne peut pas avoir d'autre importance qu'un fait, répété autant de fois qu'on le voudra. Que l'on dise, si l'on veut, que cet accord nous révèle la nécessité qui est au fond des choses, et qui en règle le cours, c'est une croyance comme une autre, et personne, assurément, ne cherchera dans la science des raisons pour l'infirmer; mais personne non plus n'a le droit de vouloir l'imposer au nom de la science : il faut s'entendre sur cet accord, admirable à coup sûr, entre les résultats de la théorie et ceux de l'expérience; encore une fois, il n'est qu'approché, et il ne peut être qu'approché, puisqu'une mesure ne peut être qu'approchée; pour le physicien, il est parfait lorsque la différence entre les résultats de la théorie et de l'expérience n'est pas plus grande que les erreurs que comporte l'expérience. Dès lors, ce qu'il convient d'induire de l'accord entre la théorie et de l'expérience, c'est que les phénomènes sont déterminés par les lois théoriques, *entre certaines limites*, entre des limites que nous connaissons, si nous connaissons les instruments de mesure : encore n'y a-t-il là qu'une induction. La valeur de cette induction ne peut être contestée, mais il ne faut pas la pousser trop loin, et l'on dépasserait infiniment les bornes entre lesquelles elle est légitime, si l'on affirmait que l'accord entre la théorie et l'expérience doit se poursuivre indéfiniment. »

Après avoir insisté sur ce qu'il y a d'admirable dans cet accord, tel que nous le constatons, et sur les « promesses » qu'il tiendra sans doute, j'imagine qu'il soit parfait, « et qu'un homme, analogue à nous, mais nous dépassant infiniment par son intelligence, soit

capable de contenir une science équivalente à la réalité extérieure, en ce sens que tous les phénomènes répondent pour lui à des transformations numériques dont il ait la claire compréhension : si la grandeur de son intelligence laissait place chez lui à quelqu'une de ces inquiétudes que nous cultivons sous le nom de *philosophie*, peut-être trouverait-il le moyen d'être encore mécontent et de se dire que la science des nombres n'est qu'une abstraction, qu'elle correspond parfaitement aux choses, mais qu'elle ne les explique pas, qu'elle s'explique seulement elle-même, et qu'elle ne répond pas même à cette question : pourquoi, dans le domaine infini des transformations numériques que ma pensée peut saisir, est-ce celles-ci, plutôt que celles-là, qui correspondent à la réalité, et pourquoi les nombres au moyen desquels je désigne et reconnais les choses correspondent-ils aux sensations que j'éprouve plutôt qu'à d'autres [1]?

J'ai publié, en 1900, un autre article dans la *Revue de Paris* sur *Les Mathématiques dans l'enseignement* [2]. Les conclusions que j'ai essayé d'y développer, tout en étant très générales, sont d'ordre pratique, et correspondent, par suite, à une face opposée de la pensée qui dominait dans le précédent article. Pratiquement, le succès de la science, et en particulier de la science appliquée, est incontestable : la révolution qui doit en résulter dans la façon de penser des individus, dans les sociétés, dans les rapports entre les peuples, est commencée et s'accélérera de plus en plus. Notre système d'enseignement doit être radicalement changé : c'est l'étude des sciences et non des littératures anciennes qui doit en être le fond; les sciences expérimentales doivent y prendre une place importante; l'enfant doit être habitué à observer, à expérimenter, à grouper les faits, à saisir le

---

[1] J'avais exposé des idées analogues, en 1875, dans un article inséré dans la *Revue scientifique* (2e série, t. VIII, p. 828) sous ce titre : *De la continuité et de la discontinuité dans les sciences et dans l'esprit.*

[2] T. IV, p. 619.

sens des lois, à les appliquer. Par suite de notre système d'examens, les Mathématiques, ou plutôt certains chapitres des Mathématiques, ont pris une importance exagérée. L'enseignement des Mathématiques est trop théorique et se suffit trop à lui-même : il devrait être, dans les lycées, subordonné à ce qui doit suivre, à l'application d'une part, de l'autre aux parties plus élevées de la science. J'ai insisté sur les dangers, pour la formation de l'esprit, de la pratique actuelle, et sur l'inconvénient qu'il y avait à déterminer, vers vingt ans, toute la carrière des jeunes gens, par la façon dont ils répondent sur quelques chapitres de Géométrie analytique ou d'Algèbre ; j'ai eu le vif plaisir de me rencontrer sur plusieurs points avec M. Appell, qui a traité d'un sujet analogue, en même temps que moi, dans *L'Enseignement mathématique*.

30963 Paris. — Imprimerie Gauthier-Villars, quai des Grands-Augustins, 55.